Probabilités 3 : Exercices

1 Densité de probabilité

Exercice 1 (*D'après HEC 2008.*)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ f(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité.

2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Montrer que l'espérance de X est égale à $\dfrac{4}{3}$.
4. Calculer la valeur de $E(X^2)$ puis celle de la variance de X.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{9}x^2 & \text{si } x \in [0;3] \\ f(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire de densité f.

2. Calculer l'espérance et la variance de X.
3. Déterminer la fonction de répartition de f.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \\ f(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire de densité f.

2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. X admet-elle une espérance ?

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = xe^{-x} & \text{si } x \in [0;+\infty[\\ f(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire de densité f.

2. Calculer l'espérance de X.
3. Déterminer la fonction de répartition de X.

Exercice 5 (*Extrait de ESC 2015.*)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \frac{1}{(\ln 2)(t+1)} \text{ si } t \in [0;1] \text{ et } f(t) = 0 \text{ sinon}$$

1. (a) Calculer $\int_0^1 \frac{1}{t+1} dt$.
   (b) Montrer que f est une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire ayant pour densité f. On note F la fonction de répartition de X.

2. (a) Calculer $F(x)$ pour tout réel $x < 0$ et pour tout réel $x > 1$.
   (b) Montrer que si $x \in [0;1]$, alors $F(x) = \frac{\ln(x+1)}{\ln 2}$.
   (c) On donne $\ln 3 \approx 1,1$ et $\ln 2 \approx 0,7$. Montrer que $P(X \leq \frac{1}{2}) \approx \frac{4}{7}$.
3. (a) Justifier que pour tout réel t de $[0;1]$ on a $\frac{t}{t+1} = 1 - \frac{1}{t+1}$.
   (b) Calculer $\int_0^1 \frac{t}{t+1} dt$.
   (c) Justifier que X admet une espérance et que $E(X) = \frac{1 - \ln 2}{\ln 2}$.

2 Lois usuelles

Exercice 6

1. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}[-1;5]$. Calculer $P(0 \leq X \leq 3)$ et $P(X \leq 0)$. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
2. Soit $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(2.5)$. Calculer $P(0,5 \leq Y \leq 2)$ et $P(Y \geq 2)$. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 7

1. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(3, 4^2)$.
   (a) Calculer $P(X \leq 6)$ et $P(X \leq 1)$.
   (b) En déduire $P(1 \leq X \leq 6)$.
2. Soit $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(12, 3^2)$.
   (a) Calculer $P(Y \geq 10)$.

(b) Calculer $P(10 \leq Y \leq 13)$.

3. Soit $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(1,5; 2,4^2)$. Calculer $P(1,2 \leq Z \leq 1,8)$.

Exercice 8

Les véhicules d'une société d'autocars peuvent être bloqués par des incidents extérieurs comme des chutes de pierres, des troupeaux sur la route, etc. On note D la variable aléatoire qui mesure la distance en kilomètres que l'autocar va parcourir depuis son entrepôt jusqu'à ce qu'il survienne un incident. On admet que la variable D suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{82}$, appelée aussi loi de durée de vie sans vieillissement.

1. Calculer la probabilité pour que la distance parcourue sans incident soit :
   (a) comprise entre 50 et 100 km ;
   (b) supérieure à 300 km.
2. Sachant que l'autocar a déjà parcouru 350 km sans incident, quelle est la probabilité qu'il n'en subisse pas non plus au cours des 25 prochains km ?
3. Déterminer la distance moyenne parcourue sans incident.
4. L'entreprise possède N_0 autocars. Les distances parcourues par chacun des autocars entre l'entrepôt et le lieu où survient un incident sont des variables aléatoires deux à deux indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{82}$.
   On note X_d la variable aléatoire égale au nombre d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d km.
   (a) Montrer que X_d suit une loi binomiale de paramètres N_0 et $e^{-\lambda d}$.
   (b) Donner le nombre moyen d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d km.

Exercice 9

Une usine fabrique des billes de diamètre 8 mm. Les erreurs d'usinage provoquent des variations de diamètre. On estime, sur les données antérieures, que l'erreur est une variable aléatoire qui obéit à une loi normale dont les paramètres sont :

- moyenne : 0 mm ;
- écart-type : 0,02 mm.

On rejette les pièces dont le diamètre n'est pas compris entre 7,97 mm et 8,03 mm. Quelle est la proportion de billes rejetées ?

Exercice 10

Le quotient intellectuel au sein d'un groupe de 1000 individus est modélisé par une loi normale de paramètres $m = 100$ et $\sigma = 5,7$.
Estimer le nombre de personnes qui ont un Q.I. supérieur à 110 au sein de ce groupe.

Exercice 11

Une compagnie aérienne utilise des avions d'une capacité de 320 passagers. Étant donné qu'environ 3% d'entre eux ne se présentent pas à l'embarquement, le nombres de passagers se présentant à l'embarquement peut être modélisé par une loi normale de paramètres $m = 310$ et $\sigma = 4$. La compagnie choisit d'accepter 327 réservations.

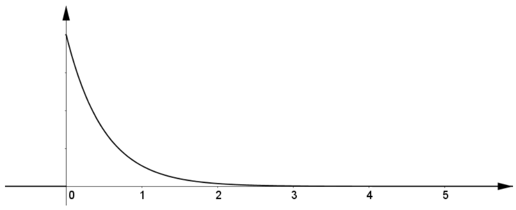
1. Estimer la probabilité que se présentent davantage de passagers que de places disponibles à bord.
2. 310 passagers se sont déjà présentés à l'embarquement. Quelle est la probabilité que se présentent davantage de passagers que de places disponibles à bord ?

Exercice 12

1. Une variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance 6.
   On sait en outre que $P(4 \leq X \leq 8) = 0,8836$.
   Quel est l'écart type de la loi suivie par X ?
2. Une variable aléatoire Y suit une loi normale.
   On sait en outre que $P(Y > 4) = 0,8413$ et que $P(Y > 16) = 0,0228$.
   Quels sont les paramètres de la loi suivie par Y ?

Exercice 13

Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.
La courbe ci-dessous représente la fonction densité associée.



Partie A

1. Interpréter sur le graphique la probabilité $P(X \leq 1)$.
2. Indiquer sur le graphique où se lit directement le paramètre λ.

Partie B

On pose $\lambda = 1,5$.

1. Calculer $P(1 \leq X \leq 2)$.
2. Déterminer l'espérance mathématique de la variable X.

Partie C

Une machine-outil fabrique des cylindres. On mesure l'écart, en dixièmes de millimètres, entre le diamètre des cylindres et la valeur de réglage de la machine.
On suppose que cet écart suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1,5$. Si l'écart est inférieur à 1, le cylindre est accepté. Si l'écart est compris entre 1 et 2, on procède à une

rectification qui permet d'accepter le cylindre dans 80% des cas. Si l'écart est supérieur à 2, le cylindre est refusé.

1. On prélève au hasard un cylindre dans la production.
   (a) Calculer la probabilité qu'il soit accepté.
   (b) Sachant qu'il est accepté, quelle est la probabilité qu'il ait subi une rectification ?
2. On prélève de manière indépendante 10 cylindres de la production. On suppose le nombre de cylindres suffisamment important pour assimiler ce tirage à un tirage successif avec remise.
   (a) Quelle est la probabilité que les 10 cylindres soient acceptés ?
   (b) Quelle est la probabilité qu'au moins un cylindre soit refusé ?

Exercice 14

Sur un grand nombre de personnes on a constaté que la répartition du taux de cholestérol suit une loi normale avec les résultats suivants :

— 56% ont un taux inférieur à 165 cg ;
— 34% ont un taux compris entre 165 cg et 180 cg ;
— 10% ont un taux supérieur à 180 cg.

Quelle est le nombre de personnes qu'il faut prévoir de soigner dans une population de 10 000 personnes, si le taux maximum toléré sans traitement est de 182 cg ?