

Fonctions : théorème des valeurs intermédiaires

What's so funny about math?



1

Image d'un intervalle par une fonction continue

Rappel

Un intervalle est un ensemble de la forme suivante : $[a; b]$ $]a; b]$ $[a; b[$ $]a; b[$ où a et b sont des nombres réels ou $\pm\infty$, avec $a < b$

Théorème.

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Premier exemple : Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 + x + 1$. Quelle est l'image par la fonction f de l'intervalle $[-2; 2]$?

Dressons le tableau de variations de f :

$f'(x) = 2x + 1$ donc $f'(x) \geq 0$ lorsque $x \geq -\frac{1}{2}$, d'où le tableau de variation :

x	-2	$-\frac{1}{2}$	2		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	3	\searrow	$\frac{3}{4}$	\nearrow	7

Donc l'image de l'intervalle $[-2; 2]$ est l'intervalle $[\frac{3}{4}; 7]$.

Deuxième exemple : Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = xe^x$.
Dressons le tableau de variations de f :
 $f'(x) = (x + 1)e^x$ donc $f'(x)$ est du signe de $(x + 1)$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	\searrow	$-\frac{1}{e}$	\nearrow	$+\infty$

Limite en $-\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, F.I.
d'après le théorème de croissance comparée, c'est l'exponentielle qui impose sa limite, donc
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.
Limite en $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

L'image de \mathbb{R} est l'intervalle $[-\frac{1}{e}; +\infty[$.

2 Théorème des valeurs intermédiaires (version faible)

Théorème.

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$,
Alors pour tout nombre m compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un nombre $x \in [a; b]$ tel que $f(x) = m$.

Premier exemple :

Soit f définie sur l'intervalle $[0; 3]$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$.
Montrons que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution α dans l'intervalle $[0; 3]$:

- f est continue car elle est construite avec des fonctions usuelles,
- $f(0) = 0$ et $f(3) = 6$,
donc 1 est compris entre 0 et 6

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1$ possède au moins une solution dans l'intervalle $[0; 3]$.

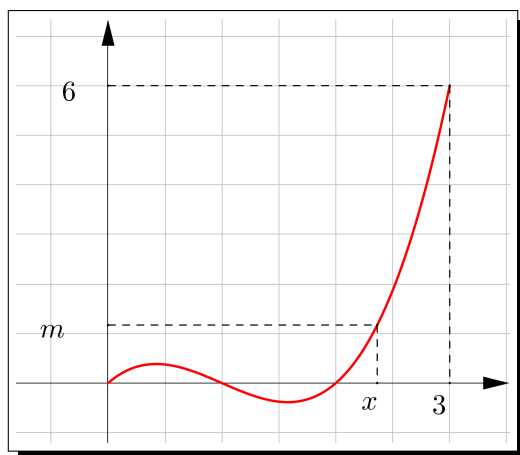


FIGURE 1 - $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ sur l'intervalle $[0; 3]$

Remarque :

Lorsque l'intervalle est ouvert en a et/ou en b , on remplace $f(a)$ et/ou $f(b)$ par $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ et/ou $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$.

Deuxième exemple :

Soit g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \ln x + 1$.

Montrons que l'équation $g(x) = 2$ admet une solution dans l'intervalle $[1; +\infty[$:

- g est continue sur $[1; +\infty[$ car elle est construite avec des fonctions usuelles.
- $g(1) = \ln 1 + 1 = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, donc $2 \in [1; +\infty[$.

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 2$ admet une solution α dans l'intervalle $[1; +\infty[$.

Troisième exemple :

Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (2x^2 + 1)e^x$. Montrons que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution dans l'intervalle \mathbb{R} :

- f est continue sur \mathbb{R}
 - Limite en $-\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^2 + 1 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$: F.I.
d'après le théorème de croissance comparée c'est l'exponentielle qui impose sa limite, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$
 - Limite en $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 + 1 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$
- Donc on a bien $1 \in]0; +\infty[$.

Donc l'équation $f(x) = 1$ admet une solution $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dressons le tableau de variations de f :

$$f'(x) = (2x^2 + 4x + 1)e^x$$

$$\Delta = 8 \text{ donc le trinôme admet deux racines, } x_1 = \frac{-4 - \sqrt{8}}{4} = \frac{-2 - \sqrt{2}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-2 + \sqrt{2}}{2}.$$

donc $f'(x) \geq 0$ à l'extérieur des racines, d'où :

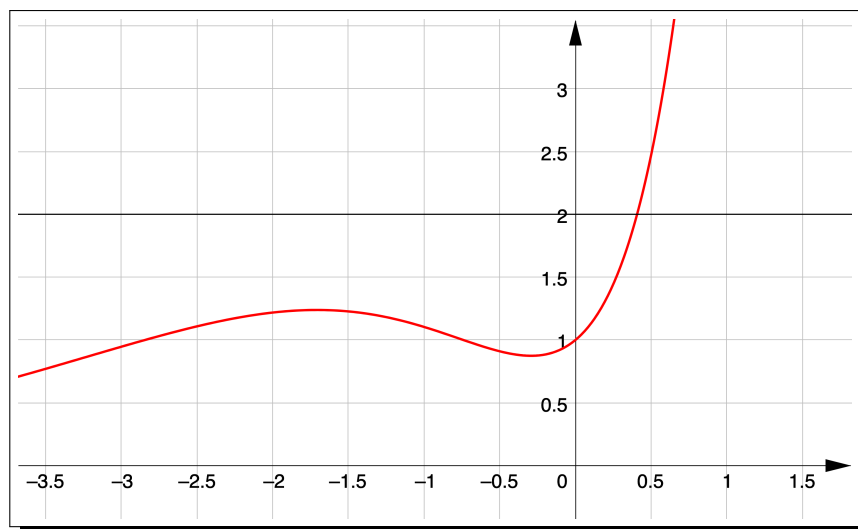


FIGURE 2 - $f(x) = (2x^2 + 1)e^x$ sur \mathbb{R}

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$				
$f'(x)$		+	0	-	0	+		
f			≈ 1.2			≈ 0.8		$+\infty$

Nous voyons qu'en réalité l'équation $f(x) = 1$ possède trois solutions. Le théorème suivant va nous permettre de préciser un cas qui garantit qu'il n'y a qu'une solution.

3 Théorème des valeurs intermédiaires (version forte)

Théorème.

Étant donné une fonction f définie sur un intervalle $[a; b]$,
Si :

- f est une fonction continue sur $[a; b]$,
- m est un nombre compris entre $f(a)$ et $f(b)$,
- f est strictement monotone sur $[a; b]$,

Alors l'équation $f(x) = m$ admet une **unique** solution α dans l'intervalle $[a; b]$.

Exemple : Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x - e^{-x} - 1$.

Montrons que l'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution α dans \mathbb{R} .

- f est continue sur \mathbb{R} car elle est construite avec des fonctions usuelles
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ donc -1 est bien compris entre $-\infty$ et $+\infty$.
- $f'(x) = 1 + e^{-x} > 0$ donc f est strictement croissante sur \mathbb{R} ,

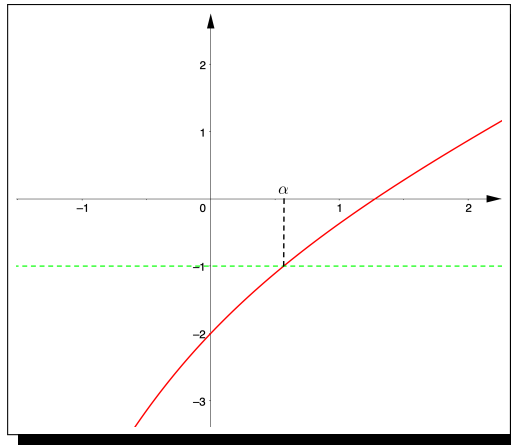


FIGURE 3 – $f(x) = -1$ admet une unique solution α dans \mathbb{R} .

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution dans \mathbb{R} .