1 EXERCICE 1

On considère les matrices suivantes :

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. (a) *Montrer que la matrice P est inversible et déterminer son inverse.*

   P est une matrice 2×2, on utilise la formule de l'inverse de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

   $$P^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{-1-1} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

   (b) *Vérifier que le polynôme $X^2 - 2X$ est un polynôme annulateur de la matrice A. En déduire les valeurs propres possibles de A.*

   On vérifie que $A^2 - 2A = 0$, le polynôme $X^2 - 2X$ est bien un polynôme annulateur de la matrice A.

   $X^2 - 2x = X(X-2)$, les racines de ce polynôme sont dons 0 et 2, qui sont des valeurs propres possibles de A.

   (c) *Montrer que $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de A. Á quelles valeurs propres sont-ils associés ?*

   On calcule :

   - $AU = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2.U$

     donc U est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2
   - $AV = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.V$

     donc V est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 0

   (d) *Justifier l'égalité $P^{-1}AP = C$*

   La matrice A possède deux valeurs propres distinctes, elle est de dimension 2×2, elle est donc diagonalisable. La matrice C est la matrice diagonale composée de ses valeurs propre, et la matrice P est la matrice formée par les vecteurs U et V en colonne. On peut affirmer d'après le cours que : $A = PCP^{-1}$ ou de façon équivalente $P^{-1}AP = C$.

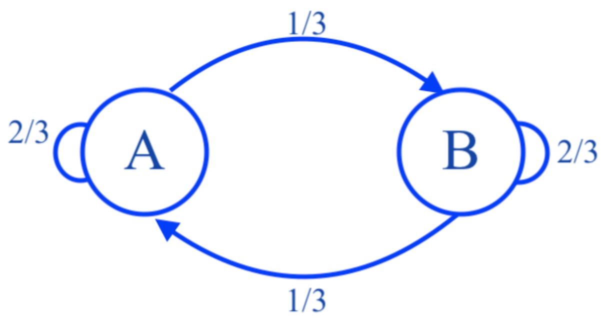
2. (a) *Exprimer B en fonction de I_2 et A. Exprimer de même D en fonction de I_2 et C.*

   On remarque que $B = A + I_2$ et que $D = C + I_2$

   (b) *En déduire que $P^{-1}BP = D$.*

   $P^{-1}BP = P^{-1}(A + I_2)P = (P^{-1}A + P^{-1})P = P^{-1}AP + P^{-1}P = C + I_2 = \boxed{D}$

3. (a) *Montrer que pour tout entier naturel n on a : $P^{-1}B^nP = D^n$*
   Par récurrence.
   (b) *Pour tout entier naturel n, donner les coefficients de D^n.*
   D étant une matrice diagonale, on peut écrire directement que $D^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
   (c) *Déduire de 3.a) et 3.b) que pour tout entier naturel n on a : $B^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n+1 & 3^n-1 \\ 3^n-1 & 3^n+1 \end{pmatrix}$*
   Ce résultat s'obtient en calculant $B^n = PD^nP^{-1}$
4. *Antoine et Béatrice jouent au Badminton. On suppose que lors de chaque échange, le joueur qui a le service emporte le point avec une probabilité $\frac{2}{3}$ et le perd avec une probabilité $\frac{1}{3}$. On suppose que c'est Antoine qui a le service lors du premier échange. Ensuite, selon les règles de ce jeu, celui qui emporte l'échange marque un point et obtient le service pour l'échange suivant.*
   Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note A_n l'événement « Antoine gagne le $n^{\text{ième}}$ échange »et B_n l'événement « Béatrice gagne le $n^{\text{ième}}$ échange ». On note a_n et b_n leurs probabilités respectives.
   Remarque : même si la question n'est pas posée, je vous conseille de faire un graphe probabiliste comme en cours. Ici A est l'état « le joueur A sert »et B l'état « le joueur B sert »



   (a) *Donner les valeurs de a_1 et b_1. Calculer a_2 et vérifier que $a_2 = \frac{5}{9}$.*
   C'est Antoine qui sert le premier. Donc $a_1 = \frac{2}{3}$ et $b_1 = \frac{1}{3}$
   (b) *On observe qu'Antoine emporte le deuxième échange. Quelle est la probabilité qu'il ait emporté le premier échange ?*
   On sait que $P_{A_1}(A_2) = \frac{2}{3}$ et on cherche $P_{A_2}(A_1)$. On peut utiliser la formule de Bayes
   $P_{A_2}(A_1) = \frac{P_{A_1}(A_2)P(A_1)}{P(A_2)}$
   On peut calculer par la formule des probabilités totales en prenant A_1, B_1 comme

système complet d'évènement :

$$\begin{aligned} P(A_2) &= P(A_2 \cap A_1) + P(A_2 \cap B_1) \\ &= P_{A_1}(A_2).P(A_1) + P_{B_1}(A_2).P(B_1) \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}.\frac{1}{3} \\ &= \frac{4}{9} + \frac{1}{9} \\ &= \frac{5}{9} \end{aligned}$$

Donc $P_{A_2}(A_1) = \frac{\frac{2}{3}.\frac{2}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{4}{9}.\frac{9}{5} = \boxed{\frac{4}{5}}$

(c) *Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que pour tout entier $n \geq 1$ on a : $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n$. Exprimer de même b_{n+1} en fonction de a_n et b_n pour tout entier $n \geq 1$.*

La formule des probabilités totales pour le système complet d'évènements A_n, B_n est

$$P(E) = P(A_n) \times P_{A_n}(E) + P(B_n) \times P_{B_n}(E)$$

- Avec $E = A_{n+1}$ on obtient

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}) &= P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) \\ a_{n+1} &= a_n.\frac{2}{3} + b_n.\frac{1}{3} \\ a_{n+1} &= \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n \end{aligned}$$

- Avec $E = B_{n+1}$ on obtient

$$\begin{aligned} P(B_{n+1}) &= P(A_n) \times P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(B_{n+1}) \\ b_{n+1} &= a_n.\frac{1}{3} + b_n.\frac{2}{3} \\ b_{n+1} &= \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}b_n \end{aligned}$$

(d) *Pour tout entier $n \geq n$, on note X_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Vérifier que $X_{n+1} = \frac{1}{3}BX_n$*

- D'une part $X_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n \\ \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}b_n \end{pmatrix}$

- D'autre part $\frac{1}{3}BX_n = \frac{1}{3}.\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n \\ \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}b_n \end{pmatrix}$

  Conclusion : les deux expressions sont bien égales $\boxed{X_{n+1} = \frac{1}{3}BX_n}$

(e) *Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$ on a :* $X_n = \dfrac{1}{3^{n-1}} B^{n-1} X_1$

Récurrence.

(f) *Déduire de* 3.c *) que pour tout entier $n \geq 1$ on* a : $a_n = \dfrac{3^n+1}{2 \times 3^n}$ *. Déterminer de même une expression de b_n en fonction de n pour tout entier $n \geq 1$.*

D'après les questions précédentes $B^n = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n+1 & 3^n-1 \\ 3^n-1 & 3^n+1 \end{pmatrix}$, il faut donc ici « remplacer n par $n-1$ » :

$B^{n-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^{n-1}+1 & 3^{n-1}-1 \\ 3^{n-1}-1 & 3^{n-1}+1 \end{pmatrix}$

Puisque $X_n = \dfrac{1}{3^{n-1}} B^{n-1} X_1$, avec $X_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3^{n-1}} B^{n-1} X_1 &= \frac{1}{3^{n-1}} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^{n-1}+1 & 3^{n-1}-1 \\ 3^{n-1}-1 & 3^{n-1}+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2 \times 3^n}\begin{pmatrix} 2(3^{n-1}+1) + 1.(3^{n-1}-1) \\ \star \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2 \times 3^n}\begin{pmatrix} 3.3^{n-1}+1 \\ \star \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2 \times 3^n}\begin{pmatrix} 3^n+1 \\ \star \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On met une $\star$ à la deuxième qui ne nous intéresse pas ici. On identifie pour trouver

$$\boxed{a_n = \frac{3^n+1}{2 \times 3^n}}$$

5. **Simulation informatique.**

(a)

```
      if  a==1 then a=grand(1,1,'bin',1,2/3)
              else a=grand(1,1,'bin',1,1/3)
```

(b)

```
a=grand(1,1,'bin',1,2/3)
S=0
for i=2:20
      if  a==1 then a=grand(1,1,'bin',1,2/3)
              else a=grand(1,1,'bin',1,1/3)
      end
      S=S+a
end
disp(S)
```

2 EXERCICE 3

Modèle 1

1. *Reconnaître la loi de X. On donnera l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X ainsi que l'expression de $P(X = k)$ pour tout entier k appartenant à $X(\Omega)$.*
   X compte le nombre de « succès »(être défectueux) au cours de 100 répétitions d'expériences identiques et indépendantes. $\boxed{X \rightsquigarrow \mathcal{B}(100; \frac{2}{100})}$.
   $\boxed{X(\Omega) = [\![0, 100]\!]}$ et $\boxed{P(X = k) = \binom{100}{k} \cdot \left(\frac{2}{100}\right)^k \cdot \left(\frac{98}{100}\right)^{100-k}}$
2. *Calculer l'espérance et la variance de X.*
   $\boxed{E(X) = np = 100.\frac{2}{100} = 2}$ et $\boxed{V(X) = np(1-p) = 100.\frac{2}{100}.\frac{98}{100} = \frac{196}{100} = \frac{49}{25}}$
3.
```
X=grand(1,1, 'bin',100,2/100)
if x=0  then Y= grand(1,1,'uin', 1, 100)
             else Y=X
end
disp(x); disp (Y)
```

Deuxième modèle

Dans cette question, la valeur de p est inconnue et on cherche à l'estimer. Pour cela on fait tester par la machine 1000 cartouches ($n \geq 1$). Pour tout i compris entre 1 et n, on note X_i la variable aléatoire de Bernoulli égale à 1 si la $i^{ième}$ cartouche est défectueuse et égale à 0 sinon. On suppose que les variables aléatoires X_i sont indépendantes. On note $T = \frac{1}{1000}\sum_{i=1}^{1000} X_i$

4. *Rappeler, pour i compris entre 1 et 1000, l'espérance et la variance de X_i.*
   $X_i \rightsquigarrow \mathcal{B}(p)$ donc $E(X_i) = p$ et $V(X_i) = p(1-p)$
5. *Calculer $E(T)$. En déduire que T est un estimateur sans biais de p.*
   $$E(T) = E\left(\frac{1}{1000}\sum_{i=1}^{1000} X_i\right) = \frac{1}{1000}\sum_{i=1}^{1000} E(X_i) \quad \text{(Par linéarité de l'espérance)}$$
   $$= \frac{1}{1000}.\underbrace{(p + p + ... + p)}_{1000 \text{ fois}} = \frac{1}{1000}.1000.p = \boxed{p}$$
   T est donc un estimateur sans biais de p.
6. *Calculer $V(T)$. Montrer que le risque quadratique de l'estimateur T est égal à $\frac{p(1-p)}{n}$.*

$$V(T) = V\left(\frac{1}{1000}\sum_{i=1}^{1000} X_i\right) = \frac{1}{1000^2}\sum_{i=1}^{1000} V(X_i) \quad \left(\text{Par les propriétés de la variance pour des v.a indépendantes}\right)$$

$$= \frac{1}{1000^2}.\underbrace{(p(1-p)+p(1-p)+...+p(1-p))}_{1000 \text{ fois}} = \frac{1}{1000^2}.1000.p(1-p) = \boxed{\frac{p(1-p)}{1000}}$$

7. *Etudier la fonction f définie par $f(x) = x(1-x)$ pour $x \in [0,1]$. On calculera la dérivée et on fera le tableau de variation. En déduire que $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ pour tout $p \in [0,1]$*

   Voir le cours.

8. *Soit $\varepsilon > 0$. Montrer, en appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev que :*

$$P(|T-p| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{4000\varepsilon^2}$$

Rappel : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Soit T est une variable aléatoire qui admet une variance.
Alors
$$\forall \epsilon > 0, \quad P(|T-E(T)| \geq \epsilon) \leq \frac{V(T)}{\epsilon^2}$$

En reportant l'espérance et la variance de T déjà calculée :

$$\forall \epsilon > 0, \quad P(|T-p| \geq \epsilon) \leq \frac{\frac{p(1-p)}{1000}}{\epsilon^2} \leq \frac{\frac{1/4}{1000}}{\epsilon^2} = \frac{\frac{1}{4000}}{\epsilon^2} = \frac{1}{4000.\epsilon^2} \quad \square$$

9. *En prenant $\varepsilon = 0.1$, montrer alors $[T-0.1;T+0.1]$ est un intervalle de confiance pour p au niveau de confiance 0.975.*

   Avec $\varepsilon = 0.1$, l'inégalité précédente devient : $P(|T-p| \geq 0.1) \leq \frac{1}{4000.0.1^2} = \frac{1}{40} = 0.025$
   On retravaille alors l'inégalité : $P(|T-p| \geq 0.1) = 1 - P(|T-p| \leq 0.1)$
   Or $|T-p| \leq 0.1$ est équivalent à dire $p \in [T-0.1;T+0.1]$, on obtient donc :
   $P(p \in [T-0.1;T+0.1]) = P(|T-p| \leq 0.1) = 1 - P(|T-p| \geq 0.1) \geq 1 - 0.025 = 0.975$

   L'intervalle $[T-0.1;T+0.1]$ est bien un intervalle de confiance pour p au niveau de confiance 0.975

3 EXERCICE 4

En classe.