1 Introduction, une réflexion épistémologique

« Que nul n'entre ici s'il est géomètre. »

Mention supposément[1] écrite sur une devanture de l'académie de Platon (-428, - 348 Av J.C)

Il serait illusoire de résumer en quelques lignes tous les apports de ceux qu'on nomme aujourd'hui bien vaguement « les grecs » (comme s'il était bien évident que tout le monde sait bien de qui on parle !). S'il ne fallait en citer qu'un de « ces grecs », ce serait sans doute Euclide, dans *Les éléments* constitue un texte (en treize livres !) fondateur de la *géométrie* et de *l'arithmétique*. L'écueil, lorsqu'on examine des mathématiques anciennes, c'est de projeter nos connaissances actuelles dans celles dont on veut examiner la nature et de glisser dans des anachronismes. A titre d'exemple, on gardera bien en tête que les grecs distinguaient *les nombres* (idéalités) et *grandeurs* (physicalité). Ainsi $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre mais une grandeur. L'énoncé « Les grecs savaient que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel » n'est pas tout à fait exact si on ne prend pas soin d'apporter quelques précisions. Inexact d'une part car la notation sous forme de racine carré n'existait pas. D'autre part, les grecs portaient une attention particulière à la *commensurabilité* des grandeurs, c'est à dire dire le fait qu'une grandeur peut être comparé à une autre par une unité de mesure commune. L'énoncé plus précis serait « les grecs savaient que la diagonale du carré est incommensurable avec son côté ». C'est tout le travail de l'historien des mathématiques que de retranscrire le plus fidèlement possible le chemin qui a permis l'éclosion de connaissances dans un lieu et un temps donnée, **en tenant compte de l'état de la connaissance à une période de l'humanité donnée**.

Ces quelques précautions étant prises, les problèmes suivants, non résolus par « les grecs », ont pour cadre la possibilité de certaines constructions :

Trois problèmes non résolus par les grecs

1. La duplication du cube : à l'aide d'une règle et d'un compas, est-il possible de construire un cube de volume double ?
2. La trisection de l'angle : à l'aide d'une règle et d'un compas, est-il possible de sectionner en trois parties égales n'importe quel angle ?
3. La quadrature du cercle : à l'aide d'une règle et d'un compas, est-il possible de construire un carré dont l'aire égale celle d'un disque ?

Pourquoi *la règle et le compas* ? Probablement parce que les deux premiers axiomes énoncés par Euclide donne toute l'importance donnée aux cercles et aux droites. En effet, ses deux premiers axiomes énoncent la possibilité de tracer une ligne droite d'un point à un autre, et celle de tracer un cercle de centre et de rayon donnés. D'autre part, ses propositions ne portent que sur des figures construites à la règle et au compas.

Ces trois problèmes ont une réponse négative et on se propose de voir pourquoi dans ce TP.

1. Cette citation n'apparaît pas dans les écrits de Platon et il semble qu'elle ait commencé à lui être attribué vers le 10ème siècle. On a aucune certitude aujourd'hui sur l'origine de ce célèbre aphorisme.

2 Constructions élémentaires

Point constructible

Un point P du plan $\mathbb{R}^2$ est dit *constructible à la règle et au compas*, s'il existe une suite $K_0, K_1, ...K_n$ de sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ tels que :
- $K_0 = \{(0,0);(1,0)\}$
- K_{i+1} est l'ensemble des points constructibles à partir de ceux de K_i :

- Soit par intersection de deux droites (AB) et (CD)
- Soit par intersection d'un cercle $\mathcal{C}(A, BC)$ et d'une droite (DE)
- Soit par intersection de deux cercles $\mathcal{C}(A, BC)$ et $\mathcal{C}(D, EF)$

Avec A, B, C, D, E et F des points de K_i

Nombre constructible

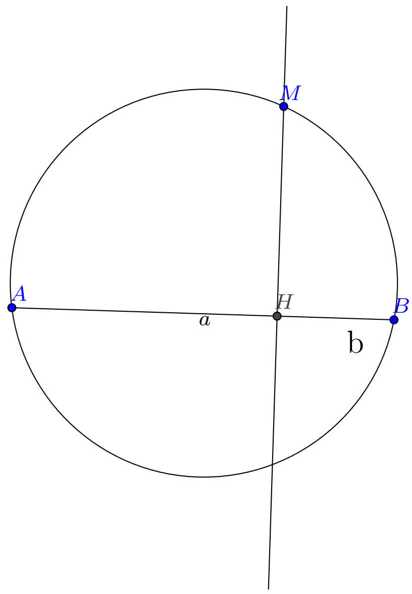
On dit que $x \in \mathbb{R}$ est constructible à la règle et au compas si le point $(x, 0)$ l'est. On note $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}$ l'ensemble des réels constructibles à la règle et au compas.

Rappeler comment construire à la règle au compas :

- Le symétrique d'un point par rapport à un autre ;
- La parallèle à une droite passant par un point .
- La perpendiculaire à une droite passant par un point .

3 Là où on surpasse les grecs

1. Montrer que $\mathbb{N} \subset \mathcal{C}_{\mathbb{R}}$
2. Montrer que $\mathbb{Z} \subset \mathcal{C}_{\mathbb{R}}$
3. Montrer que tout point du type $(0, y)$ avec $y \in \mathbb{Z}$ est constructible. En déduire que $\mathbb{Q} \subset \mathcal{C}_{\mathbb{R}}$ (on pensera au théorème de Thales).
4. Montrer que si x est constructible alors $\sqrt{x}$ l'est. On pourra penser, soit au théorème de Pythagore, soit à la figure suivante en montrant que $MH^2 = a.b$.
   Application :
   (a) Construire à la règle et au compas un carré dont l'aire est le double du carré initial ?
   (b) Construire de deux manières le réel $\sqrt{73}$



5. En déduire que $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$ stable par racine carrée.

6. **Nombres algébriques**

   Un nombre $x \in \mathbb{R}$ est *algébriques* s'il est racine d'un polynôme de $\mathbb{Q}[X]$. Dans le cas contraire il est dit *transcendant*. Lorsque x est algébrique, on désigne par « degré de x », le plus petit degré du polynôme unitaire dont x est racine. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des nombres algébriques.

   (a) Montrer que $\sqrt{2}$ est algébrique de degré 2.

   (b) Montrer que si x est de degré n alors son polynôme annulateur est irréductible.

   (c) Montrer alors que $\sqrt[3]{2}$ est algébrique de degré 3.

7. Réponse au problème initial :

   Théorème de Wantzel

   Si un nombre x est constructible alors il est algébrique et de degré une puissance de 2

   En déduire

   — Qu'il est impossible de construire, à partir d'un cube donné, un cube dont le volume est le triple du cube initial.

   — Qu'il est impossible de « trisecter » un angle à la règle et au compas. Pour cela on remarquera que construire un angle donné est équivalent à construire son cosinus et on utilisera la relation $\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)$ avec θ bien choisi.

   — Que la quadrature du cercle est impossible : construire, à partir d'un carré, un cercle dont l'aire est la même.

4 Extension aux problèmes de compas seul

Napoléon était féru de sciences. N'oublions pas qu'il le fondateur de l'école normale supérieure, de l'école polytechnique , des classes préparatoires...

On rapporte qu'il est l'auteur du problème suivant :

Problème de Napoléon

Etant donné un cercle dont on a perdu le centre, est-il possible de le retrouver avec un compas seulement

Avec une règle et un compas, le problème est élémentaire. Si on enlève la règle, la réponse est affirmative mais elle n'a rien d'évident. Il existe un théorème plus général :

Théorème de Mohr-Maschéroni

Tout point constructible à la règle et au compas, l'est au compas seul

Construire au compas seul :

8. Le symétrique d'un point par rapport à un point.
9. Le symétrique d'un point par rapport à une droite.
10. Le milieu d'un segment donné.
11. Si A et B sont deux points, un point C tel que l'angle (AB, AC) soit droit.