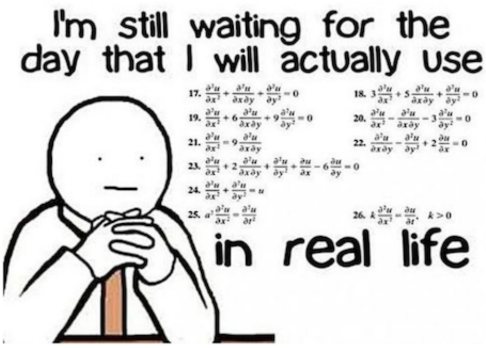
Variables aléatoires



Étant donnée une expérience aléatoire d'univers Ω, rappelons qu'une variable aléatoire est une application de Ω dans $\mathbb{R}$.

Par exemple, si on lance deux dés à six faces, on peut s'intéresser :

- à la variable aléatoire X qui à un lancer associe la valeur du premier dé ;
- à la variable aléatoire Y qui à un lancer associe la valeur du second dé ;
- à la variable aléatoire Z qui à un lancer associe la somme des deux dés.

1 Indépendance de deux v.a

Définition

Deux variables aléatoires X et Y sont dites indépendantes si, pour tous réels x et y, les évènements $(X = x)$ et $(Y = y)$ sont indépendants.

Exemple : Parmi les trois variables aléatoires ci-dessus, X et Y sont indépendantes. Le vérifier en utilisant la définition serait fastidieux : il faudrait s'assurer que $P((X = x) \cap (Y = y)) = P(X = x) \times P(Y = y)$ pour tous x et y allant de 1 à 6, soit 36 égalités à vérifier ... En fait l'indépendance de ces deux variables aléatoires est assez évidente : la valeur de l'une n'a aucune incidence sur la valeur de l'autre.
En revanche les variables aléatoires X et Z ne sont pas indépendantes et un seul calcul permet de le vérifier :

$$P((X = 1) \cap (Z = 3)) = \frac{1}{36} \qquad P(X = 1) = \frac{1}{6} \qquad P(Z = 3) = \frac{2}{36}$$

Donc $P((X = 1) \cap (Z = 3)) \neq P(X = 1) \times P(Z = 3)$.

2 Espérance d'une somme de variables aléatoires

Dans l'exemple que nous avons donné, Z est la somme des variables aléatoires X et Y : $Z = X + Y$. Il faut connaître les propriétés suivantes sur les sommes :

Linéarité - première propriété (vu en ECT1)

Pour toute paire de deux variables aléatoires X et Y définies sur le même univers Ω,

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

En effet, $E(X+Y) = \sum_{\omega \in \Omega} (X+Y)(\omega)P(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\omega) + \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega)P(\omega) = E(X) + E(Y)$.

Exemple : L'espérance de Z est $E(Z) = E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 3,5 + 3,5 = 7$. La moyenne théorique que l'on peut espérer pour la somme de deux dés est 7.

Espérance d'une somme de *n* variables aléatoires

Pour toute famille de n variables aléatoires $X_1 \ldots X_n$ définies sur le même univers Ω,

$$E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$$

Remarque : Ce qui peut s'écrire de façon condensée :

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

Exemple : On lance n dés à six faces. On note X_i la variable aléatoire qui correspond à la valeur du i^e dé. Quelle est l'espérance de la somme des n dés ?
Réponse : $E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = n \times 3,5$. L'espérance est $3,5 \times n$.

Linéarité - Deuxième propriété (ECT1)

Pour toute paire de variables aléatoires X et Y, et pour tous nombres a et b,

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

Exemple : On note S la variable aléatoire égale à trois fois la valeur du premier dé moins 2 fois la valeur du deuxième dé. Alors $E(S) = E(3X - 2Y) = 3E(X) - 2E(Y) = 3 \times 3,5 - 2 \times 3,5 = 3,5$.

3 Espérance du produit de deux variables aléatoires

Tout d'abord, pour toute paire de variables aléatoires X et Y définies sur un même univers Ω :

$$E(XY) = \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xyP([X=x]\cap[Y=y])$$

En effet, si X prend les valeurs x_1, x_2, $\dots$, x_p et Y prend les valeurs y_1, y_2, $\dots$, y_q la variable aléatoire XY prend les valeurs $x_i \times y_j$ avec la probabilité $P([X=x_i]\cap[Y=y_j])$, d'où cette expression de l'espérance.

Mais cette formule n'est pas très pratique en générale. Mais lorsque les VA sont indépendantes, tout est beaucoup plus simple :

Espérance d'un produit de deux VA indépendantes

Si X et Y sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X)\times E(Y)$

Preuve : Faite en cours sur un exemple .

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xyP([X=x]\cap[Y=y]) \\
&= \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xyP(X=x)\times P(Y=y) \\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x)\times \sum_{y\in Y(\Omega)} yP(Y=y) \\
&= E(X)\times E(Y)
\end{aligned}$$

Exemple : Les variables X et Y étant indépendantes, l'espérance du produit de deux dés est égale à $E(XY) = E(X)E(Y) = 3,5^2 = 12,25$.

4 Variance d'une somme de variables aléatoires

Rappel (ECT1) : Variance d'une variable aléatoire

La variance d'une variable aléatoire X est égale à :

$$V(X) = E((X-E(X))^2)$$

La variance est égale à la moyenne théorique des carrés des écarts à l'espérance. Elle mesure la dispersion des valeurs prises par la variable aléatoire X. une variable aléatoire constante a une variance nulle.

Exemple : $V(X) = E((X-3,5)^2) = \frac{1}{6}\times(-2,5)^2 + \frac{1}{6}\times(-1,5)^2 + \frac{1}{6}\times(-0,5)^2 + \frac{1}{6}\times 0,5^2 + \frac{1}{6}\times 1,5^2 + \frac{1}{6}\times 2,5^2 \approx 2,91$ arrondi au centième près.

Il est difficile d'interpréter la valeur d'une variance seule. En général, on compare plutôt les variances de deux variables aléatoires. Pour ce faire, calculons la variance de Z :

$$\begin{aligned}V(Z) = {} & \frac{1}{36}\times(-5)^2+\frac{2}{36}\times(-4)^2+\frac{3}{36}\times(-3)^2+\frac{4}{36}\times(-2)^2+\frac{5}{36}\times(-1)^2+\frac{6}{36}\times(0)^2 \\ & +\frac{5}{36}\times(1)^2+\frac{4}{36}\times(2)^2+\frac{3}{36}\times(3)^2+\frac{2}{36}\times(4)^2+\frac{1}{36}\times 5^2=\frac{210}{36}\approx 5,83\end{aligned}$$

Donc la variable aléatoire Z prend des valeurs plus dispersées que la variable aléatoire X, dans la mesure où elle peuvent être comparées.

Une autre façon de calculer la variance d'une variable aléatoire est donnée par le théorème suivant :

Propriété

Pour toute variable aléatoire X,

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

En effet, en notant m l'espérance de X,

$$\begin{aligned}V(X) = E((X-\overline{X})^2) &= \sum_{x\in X(\Omega)} (x-m)^2 P(X=x) \\ &= \sum_{x\in X(\Omega)} (x^2-2.m.x+m^2)P(X=x) \\ &= \sum_{x\in X(\Omega)} x^2P(X=x) - 2\sum_{x\in X(\Omega)} x.m.P(X=x) + \sum_{x\in X(\Omega)} m^2.P(X=x) \\ &= E(X^2) - 2m\sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x) + m^2\sum_{x\in X(\Omega)} P(X=x) \\ &= E(X^2) - 2.m^2 + m^2 \\ &= E(X^2) - m^2\end{aligned}$$

Exemple : Vérifions cette relation pour X.
$E(X^2)=\frac{1}{6}\times 1^2+\frac{1}{6}\times 2^2+\frac{1}{6}\times 3^2+\frac{1}{6}\times 4^2+\frac{1}{6}\times 5^2+\frac{1}{6}\times 6^2=\frac{91}{6}$.
Donc $V(X)=E(X^2)-E(X)^2=\frac{91}{6}-3,5^2\approx 2,91$. Ça marche !

5 Covariance de deux variables aléatoires

Définition

On appelle covariance de deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω le nombre :

$$\text{Cov}(X,Y) = E((X-E(X))(Y-E(Y))$$

C'est la moyenne théorique du produit des écarts de chacune des variables aléatoires à sa propre espérance. La covariance mesure, comme son nom l'indique, les variations simultanées des deux variables aléatoires.

Exemple : Calculons la covariance de X et Z. On trouve $\mathrm{Cov}(X, Z) = 52,5$. Le résultat est positif car lorsque l'un des dés augmente, il est plus probable que leur somme augmente, et vice-versa.

Remarque : Pour toute variable aléatoire X, $V(X) = \mathrm{Cov}(X, X)$.

Propriétés

Pour toutes variables aléatoires X, Y et Z, et pour tous nombres a et b,

Symétrie	$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$
Linéarité à gauche	$\mathrm{Cov}(aX + bY, Z) = a\,\mathrm{Cov}(X, Z) + b\,\mathrm{Cov}(Y, Z)$
Linéarité à droite	$\mathrm{Cov}(X, aY + bZ) = a\,\mathrm{Cov}(X, Y) + b\,\mathrm{Cov}(X, Z)$
Cas d'une V.A. constante	$\mathrm{Cov}(X, a) = 0$

Comme pour la variance, nous disposons d'une formule pour calculer la covariance.

Formule de Huygens

Pour toute paire de variables aléatoires X, Y,

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

La démonstration est très semblable à celle effectuée plus haut du théorème qui établit que $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$. Nous ne la détaillons pas ici.

Nous avons vu que l'espérance du produit de deux variables aléatoires est égal au produit des espérances lorsque les deux variables aléatoires sont indépendantes. Par conséquent :

Covariance de deux VA indépendantes

Pour toute paire de variables aléatoires X et Y indépendantes,

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$$

Remarque importante : cette propriété peut servir à montrer que deux VA ne sont pas indépendantes. En effet si l'on trouve $\mathrm{Cov}(X, Y) \neq 0$ alors on peut conclure que X et Y ne sont pas indépendantes.

On peut alors énoncer une propriété reliant la variance et la covariance :

Variance d'une somme de variables aléatoires

Pour toute paire de variables aléatoires X et Y définies sur un même univers Ω,

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\ \mathrm{Cov}(X,Y)$$

Preuve (qui n'est pas à connaître) :
Ici $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ désigne l'espérance

$$\begin{aligned}
V(X+Y) &= \sum_{\omega\in\Omega}((X+Y)(\omega) - E(X+Y))^2 P(\omega) = \sum_{\omega\in\Omega}((X+Y)(\omega) - (\overline{X}+\overline{Y}))^2 P(\omega) \\
&= \sum_{\omega\in\Omega}((X(\omega)-\overline{X}) + (Y(\omega)-\overline{Y}))^2 P(\omega) \\
&= \sum_{\omega\in\Omega}((X(\omega)-\overline{X})^2 + (Y(\omega)-\overline{Y})^2 + 2(X(\omega)-\overline{X})(Y(\omega)-\overline{Y}))P(\omega) \\
&= \sum_{\omega\in\Omega}(X(\omega)-\overline{X})^2 P(\omega) + \sum_{\omega\in\Omega}(Y(\omega)-\overline{Y})^2 P(\omega) + 2\sum_{\omega\in\Omega}(X(\omega)-\overline{X})(Y(\omega)-\overline{Y})P(\omega) \\
&= V(X) + V(Y) + 2\ \mathrm{Cov}(X,Y)
\end{aligned}$$

Conséquence très importante

Pour toute paire de variables aléatoires indépendantes,

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

Ce résultat peut être étendu à une somme finie de variables aléatoires dites mutuellement indépendantes.

Définition

Les variables aléatoires X_1, X_2, …, X_n sont dites mutuellement indépendantes si elles sont deux à deux indépendantes.

Propriété

Pour toute famille de variables aléatoires X_1, X_2, …, X_n mutuellement indépendantes,

$$V(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \ldots + V(X_n)$$