Exercices : Probabilité 2

1 Loi et espérance

Exercice 1

On lance un dé pipé qui a une probabilité égale à $\frac{1}{2}$ de tomber sur 6, et la même probabilité de tomber sur chacune des autres faces de 1 à 5.

1. On lance une fois le dé et on note X le résultat du dé.
   (a) Montrer que $P(X = 1) = 0,1$.
   (b) Donner la loi de probabilité de X.
   (c) Calculer l'espérance de X et l'interpréter par une phrase.
2. On lance deux fois le dé et on note Y le nombre de 6 obtenus.
   (a) Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire Y ?
   (b) Calculer l'espérance de Y et l'interpréter par une phrase.
3. On lance deux fois ce même dé et on note S la somme des résultats obtenus.
   (a) Donner la loi de S.
   (b) Calculer l'espérance de S et l'interpréter par une phrase.

Exercice 2

On tire une boule au hasard dans une urne contenant six boules indiscernables au toucher, une verte, deux jaunes et trois rouges. Une boule verte rapporte 20 points, une jaune 10 points et une rouge 5 points. On note X le gain à l'issue d'un tirage.

1. Donner la loi de X.
2. Calculer l'espérance de X.

Exercice 3

On lance deux dés équilibrés à quatre faces numérotées de 1 à 4. On note X la somme des deux dés.

1. Décrire l'univers Ω associé à cette expérience aléatoire et donner $X(\Omega)$.
2. Pour tout $k \in X(\Omega)$, décrire l'évènement $[X = k]$ et calculer $P([X = k])$.
3. Calculer $E(X)$

Exercice 4

On lance deux dés équilibrés à 6 faces. On note X la variable aléatoire égale à la plus grande des deux faces, et à l'une ou l'autre des deux faces lorsqu'elle sont égales.

1. Décrire l'univers Ω associé à cette expérience aléatoire.
2. Donner $X(\Omega)$.
3. Donner la loi de X et calculer $E(X)$.

Exercice 5 (*Linéarité de l'espérance*)

On tire au hasard deux boules dans une urne contenant 3 boules rouges et 2 boules bleues. On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouge tirées.

1. Donner la loi de X et son espérance.
2. Une boule rouge pèse 20g et une boule bleue 30g. Exprimer en fonction de X la masse M des deux boules tirées et calculer l'espérance de M.

Exercice 6

Le professeur de mathématiques achète pour ses étudiants de ECT1 des canettes de jus de fruits sans sucre. Il en prend une quantité au hasard ; on note X le nombre de canettes achetées. La loi de X est donnée par :

x_i	1	2	3	4	5	6
$P([X = x_i])$	$0,1$	$0,1$	$0,2$	$0,35$	$0,15$	$0,1$

1. Calculer l'espérance de X.
2. Le prix d'une canette étant de 200 francs, exprimer la dépense totale D en fonction de X et en déduire l'espérance de D.

Exercice 7

On lance deux fois une pièce. On note X la variable aléatoire égale à 1 si le premier lancer est pile, et à 0 sinon, et Y la variable aléatoire égale à 1 si la pièce tombe deux fois du même côté et à 0 sinon.

Donner les lois de X et de Y. Que remarquez-vous ?

Exercice 8

Une boîte contient 31 jetons rouges, 18 jetons bleus, et 1 jeton vert. Un jeu consiste à piocher un jeton dans la boîte. Pour jouer, il faut payer 2 euros. Ensuite, si on pioche un jeton rouge, on ne gagne rien. Si on pioche un jeton bleu on gagne 1 euro, et si on pioche le jeton vert, on gagne 50 euros.
On appelle G le gain algébrique d'un joueur à la fin d'une partie (le gain est un nombre positif si le joueur gagne de l'argent, négatif s'il en perd).

1. Déterminer $G(\Omega)$, et la loi de G.
2. Calculer $P(G \leq 0)$. Que représente ce nombre ?
3. Calculer $P_{[G \leq 0]}(G = -2)$. Que représente ce nombre ?
4. Calculer l'espérance de G et interpréter le résultat.

2 Fonction de répartition

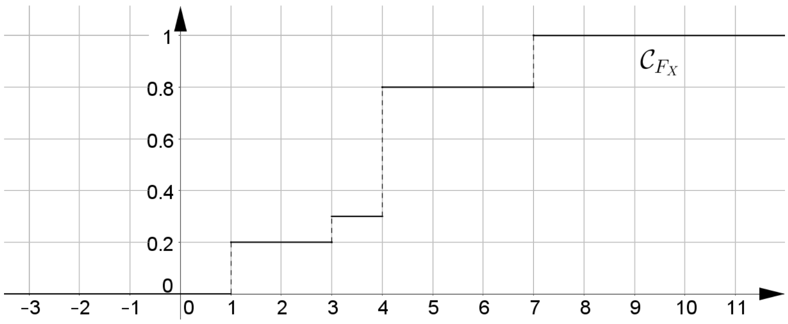
Exercice 9

Un dé cubique est équilibré, mais ses faces sont les suivantes : -2 ; -2 ; 1 ; 1 ; 1 ; 4.
On note X la variable aléatoire égale au nombre affiché sur le dé après un lancer.

1. Déterminer la loi de X et calculer son espérance.
2. Tracer le diagramme en bâtons de sa loi, et sa fonction de répartition.

Exercice 10

On a représenté ci-dessous la fonction de répartition d'une variable aléatoire X.



Donner la loi de X.

Exercice 11

On lance quatre fois une pièce de monnaie, et on note X le nombre de pile obtenus.
Représenter la loi de X par un diagramme à bâtons ainsi que la courbe représentative de sa fonction de répartition.

Exercice 12

Cinq boules indiscernables au toucher sont placées dans une urne. Deux sont blanches, et trois sont noires. On tire au hasard, successivement et sans remise des boules de l'urne, et on s'arrête dès que l'on a pioché une boule blanche. On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de boules tirées.

1. Déterminer $X(\Omega)$ et la loi de probabilité de X.
2. Quelle est la probabilité que l'on s'arrête avant d'avoir tiré 3 boules ?
3. Tracer la courbe représentative de la fonction de répartition de X.
4. Calculer l'espérance de X.
5. On note Y le nombre de boules restant dans l'urne à l'issue du tirage. Exprimer Y en fonction de X et en déduire l'espérance de Y.