Probabilités 4 : exercices

1 Loi de couple

Exercice 1

On donne ci-dessous la loi du couple de deux variables aléatoires X et Y :

$y_j \backslash x_i$	1	2	3	4
1	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\dots$	$\frac{2}{16}$

1. Déterminer la valeur manquante du tableau.
2. Déterminer $P([X = 2] \cap [Y = 2])$.
3. Reproduire le tableau en y ajoutant les lois marginales.
4. Calculer $E(X)$ et $E(Y)$.
5. Calculer la covariance de X et Y.
6. Donner la loi conditionnelle de Y sachant $[X = 4]$.

Exercice 2 (*Extrait de ESC 2007.*)

Un sac S contient cinq jetons : deux sont numérotés 1 et les trois autres sont numérotés 2. On extrait successivement et avec remise deux jetons du sac S. On désigne par X la variable aléatoire égale à la somme des numéros des deux jetons tirés, et par Y la variable aléatoire égale au maximum des numéros des deux jetons tirés.

1. Donner la loi de probabilité du couple (X, Y), en présentant les résultats dans un tableau à double entrée.
2. En déduire la loi de probabilité de X et celle de Y.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 3 (*D'après ESCP 2013*)

On dispose de deux urnes $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$. L'urne $\mathcal{U}_1$ contient 3 boules rouges et 2 vertes, tandis que l'urne $\mathcal{U}_2$ contient 1 boule rouge et 4 boules vertes.
On choisit une des deux urnes au hasard, puis on tire dans l'urne choisie une boule que l'on remet ensuite dans la même urne.

— si la boule tirée est rouge, on effectue un second tirage d'une boule dans l'urne $\mathcal{U}_1$;

— si la boule tirée est verte, on effectue un second tirage d'une boule dans l'urne $\mathcal{U}_2$.

Soient X_1 et X_2 les variables aléatoires définies par :

$X_1 = \begin{cases} 1 & \text{si la première boule tirée est rouge} \\ 0 & \text{si la première boule tirée est verte} \end{cases}$ et

$$X_2 = \begin{cases} 1 & \text{si la deuxième boule tirée est rouge} \\ 0 & \text{si la deuxième boule tirée est verte} \end{cases}$$

On pose : $Z = X_1 + X_2$.

1. (a) Montrer que $P([X_1 = 1]) = \dfrac{2}{5}$. Quelle est la loi de la variable aléatoire X_1 ?
   (b) Donner les valeurs de $E(X_1)$ et $V(X_1)$.
2. (a) Montrer que $P([X_2 = 0] \cap [Z = 0]) = \dfrac{12}{25}$.
   (b) Donner sous forme de tableau la loi du couple (X_2, Z).
3. (a) Déterminer la loi de X_2 ainsi que $E(X_2)$ et $V(X_2)$.
   (b) Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
   (c) Déterminer la loi de Z.
   (d) Calculer $E(Z)$. Montrer que $V(Z) = \dfrac{414}{625}$.
4. On considère l'évènement : « la première boule tirée est verte ». Calculer la probabilité que cette boule verte provienne d'un tirage dans l'urne $\mathcal{U}_1$.
5. On se propose dans cette question de calculer $V(Z)$ par une autre méthode.
   (a) Calculer $E(X_2 Z)$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Cov}(X_2, Z) = \dfrac{204}{625}$.
   (c) En déduire la valeur de $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.
   (d) Utiliser le résultat précédent pour calculer $V(Z)$.

Exercice 4 (*Extrait de ESC 2010*)

On dispose d'un dé cubique classique équilibré et d'une pièce équilibrée. On lance le dé et on observe son résultat :

Si celui-ci est un 6, on lance la pièce deux fois. Dans tous les autres cas, on lance la pièce une seule fois.

On note X la variable aléatoire égale au résultat du dé.

On note Y la variable aléatoire égale au nombre de PILES apparus au cours de cette expérience.

1. (a) Justifier que X suit une loi uniforme que l'on précisera en détail.
   (b) Donner l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$.
2. Montrer que $P(Y = 2) = P([Y = 2] \cap [X = 6]) = \dfrac{1}{24}$.
3. (a) Montrer que pour $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $P_{[X=k]}(Y = 0) = \dfrac{1}{2}$
   (b) Que vaut $P_{[X=6]}(Y = 0)$?
   En déduire en utilisant la formule des probabilités totales que $P(Y = 0) = \dfrac{11}{24}$.
   (c) Donner finalement la loi de la variable Y et calculer son espérance.

4. (a) Recopier et compléter les cases du tableau suivant afin qu'il fournisse la loi du couple (X, Y) :

$Y \backslash X$	1	2	3	4	5	6
0						
1						
2						

(b) Calculer alors la covariance de X et Y.

2 Valeur absolue

Valeur absolue

La fonction valeur absolue est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

La distance entre deux nombres a et b est donnée par $|a - b|$.

Exercice 5

1. Calculer : $|-4|$, $|3|$, $|-4,1|$, et $|2-7|$.
2. Tracer la courbe représentative de la fonction valeur absolue.
3. La fonction valeur absolue est-elle continue sur $\mathbb{R}$? dérivable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 6

1. Représenter sur une droite graduée l'ensemble des nombres x tels que $|x-2| < 3$.
2. Représenter sur une droite graduée l'ensemble des nombres x tels que $|x+3| < 2$.
3. Représenter sur une droite graduée l'ensemble des nombres x tels que $|x-1| > 4$.

3 Inégalités probabilistes

Exercice 7

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p.

1. Donner l'espérance et la variance de la variable aléatoire $\dfrac{X}{n}$.
2. En déduire, en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, que pour tout $\epsilon > 0$:

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}$$

3. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{X}{n}-p\right| \geq \epsilon\right) = 0$

Exercice 8

Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et d'écart type σ.
Montrer, en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, que :

$$P(|X-\mu| < 2\sigma) \geq \frac{3}{4}$$

Exercice 9

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $f(x) = x(1-x)$.
2. En déduire que f est majorée par $\frac{1}{4}$.

Une population de personnes présente une propriété donnée avec une proportion inconnue $p \in]0;1[$.
On choisit un échantillon de n personnes et l'on pose $X_i = 1$ si le i-ème individu présente la propriété étudiée, 0 sinon. On considère que les variables aléatoires X_i ainsi définies sont indépendantes et suivent toutes une loi de Bernoulli de paramètre p.

3. Quelle est la loi suivie par $S_n = X_1 + \ldots + X_n$?
4. Déterminer l'espérance et la variance de $\frac{S_n}{n}$.
5. Soit $\epsilon > 0$. Établir
$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}-p\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{1}{4n\epsilon^2}$$
6. Pour $\epsilon = 0,05$, quelle valeur de n choisir pour que $\frac{S_n}{n}$ soit voisin de p à ϵ près avec une probabilité supérieure à 95 % ?

Exercice 10

Soit $X_1, X_2, \ldots X_8$, huit variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi de Poisson de paramètre $\lambda = 2$. On pose $Z = X_1 + \ldots + X_8$.

1. Utiliser l'inégalité de Markov pour obtenir une borne pour $P(Z \geq 32)$
2. En remarquant que $P(Z \geq 32) = P(Z - 16 \geq 16)$, qu'obtient-on en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ?

Exercice 11

Un professeur sait par expérience que la note obtenue par un étudiant se présentant à un examen est une variable aléatoire X d'espérance 75.

1. Donner, en utilisant l'inégalité de Markov, une borne supérieure à la probabilité pour que la note du test d'un étudiant dépasse 85.

Dans les questions qui suivent, on suppose de plus que X a pour variance $\sigma^2 = 25$.

2. Justifier que $P(X \geq 85) \leq P(|X - 75| \geq 10)$.
3. En déduire, en utilisant cette fois l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, une nouvelle borne supérieure à la probabilité pour que la note du test d'un étudiant dépasse 85.
4. Le professeur est satisfait si la moyenne de classe obtenue à l'issue des corrections est comprise entre 75 et 85. Combien d'étudiants doivent se présenter à cet examen pour que la probabilité de l'événement E : « le professeur est satisfait » dépasse 0,9 ?