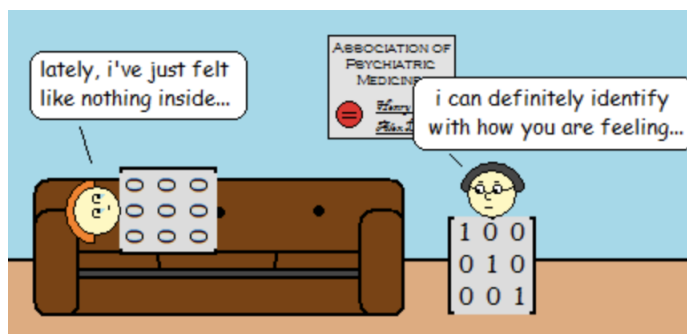


# Matrices 2 : Cours



## 1 Rappel

### Définition

Soit  $A$  une matrice carrée. On dit que  $A$  est inversible s'il existe une matrice  $B$  telle que  $A \times B = B \times A = I$ .  $B$  est alors appelée l'inverse de  $A$  et notée  $A^{-1}$ .

Remarque importante : Si on trouve  $A \times B = I$ , on a automatiquement  $B \times A = I$  sans avoir besoin de le vérifier. C'est un théorème puissant qui est admis en ECT.

## 2 Différentes méthodes pour trouver l'inverse d'une matrice

### 2.1 Cas où la matrice est proposée

Dans les exercices, on peut nous donner  $A$  et  $B$  et nous inviter à calculer  $A \times B$ .

### Deux cas

- Si on trouve  $A \times B = I$ , on en déduit que  $A$  est inversible et que  $A^{-1} = B$
- Si on trouve  $A \times B = \alpha \cdot I$  où  $\alpha$  est un nombre réel, alors on en déduit que  $A$  est inversible et que  $A^{-1} = \frac{1}{\alpha} \cdot B$

Exemple : Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 4 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

On calcule :  $A \times B$  et on trouve  $A \times B = 2I$ . En multipliant par  $\frac{1}{2}$  des deux côtés de

l'égalité on trouve  $A \times \left(\frac{1}{2}B\right) = I$  donc  $A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

## 2.2 Cas où on connaît une relations sur la matrice

### Méthode

Lorsqu'on connaît une relation algébrique sur  $A$ , on traite l'égalité de façon à la mettre sous la forme

$$A \times (\dots\dots) = I$$

Exemple : Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ . Le texte demande de montrer que  $A^2 = 4A - 3I$ , ce qu'on fait par le calcul.

Ensuite, on met  $A$  en facteur :  $A(A - 4I) = -3I$

On multiplie par  $\frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$  :  $A \left( -\frac{1}{3}(A - 4I) \right) = I$ .

On en déduit que  $A$  est inversible et que  $A^{-1} = -\frac{1}{3}(A - 4I) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

## 2.3 Méthode par système linéaire

Un système linéaire de dimensions  $2 \times 2$  est un couple d'équations de la forme :  $\begin{cases} 2x + 3y = u \\ x + 2y = v \end{cases}$

On peut mettre en forme ce système au moyen d'une matrice :  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

Pour trouver l'inverse de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ , on cherche à résoudre le système  $AX = Y$ , où  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ , en donnant la solution sous la forme  $X = A^{-1}Y$ .

$$\begin{aligned}
&\text{Ainsi, } \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y = u \\ x + 2y = v \end{array} \right| 2 \times L_2 \rightarrow L_2 \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y = u \\ 2x + 4y = 2v \end{array} \right| L_1 - L_2 \rightarrow L_2 \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y = u \\ -y = u - 2v \end{array} \right| L_1 + 3L_2 \rightarrow L_1 \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x = 4u - 6v \\ -y = u - 2v \end{array} \right| \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2u - 3v \\ y = -u + 2v \end{array} \right| \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc finalement on a trouvé l'inverse de  $A$  et  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

#### Application :

Un magasin d'informatique propose deux types de disques durs : les Xérion de 500 Mo et les Yolta de 1 To.

Mickaël dépense 105 € pour l'achat de deux disques durs de 500 Mo et trois de 1 To. Azaria dépense 65 € pour l'achat d'un disque dur de 500 Mo et deux de 1 To. Calculer le prix de chaque article.

Soit  $x$  le prix en € d'un disque Xérion et  $y$  le prix d'un disque Y.

Les données se traduisent par :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y = 110 \\ x + 2y = 75 \end{array} \right.$$

D'après la méthode précédente on a donc :

$$\text{Donc } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 105 \\ 65 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 25 \end{pmatrix}$$

Conclusion : un disque Xérion coute 15 € et un disque Yolta 25 € .

## 2.4 La formule pour les matrices $2 \times 2$

On peut résoudre le système précédent de manière tout à fait générale, et trouver ainsi une formule générale de l'inverse d'une matrice. Nous nous limiterons au cas d'une matrice  $2 \times 2$  car au-delà les formules sont excessivement grandes.

Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  une matrice  $2 \times 2$  quelconque. Nous allons déterminer  $A^{-1}$  en résolvant le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} ax + by = u \\ cx + dy = v \end{array} \right| \begin{array}{l} dL_1 - bL_2 \rightarrow L_1 \\ -cL_1 + aL_2 \rightarrow L_2 \end{array} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (ad - bc)x = du - bv \\ (ad - bc)y = -cu + av \end{array} \right.$$

Donc  $(ad-bc) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ , donc si  $ad-bc \neq 0$ ,  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{(ad-bc)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ .

### Inverse d'une matrice $2 \times 2$

Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  une matrice  $2 \times 2$ .

$A$  est inversible si et seulement si  $ad - bc \neq 0$  et dans ce cas  $A^{-1} = \frac{1}{(ad-bc)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ .

## 2.5 Le pivot de Gauss

La méthode du pivot de Gauss permet de calculer l'inverse d'une matrice par étapes. En fait elle consiste à résoudre un système linéaire sans s'encombrer des  $x, y, u, v \dots$

Par exemple, soit à inverser la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

On résout le système  $\begin{cases} 2x + y + z = u \\ 3x + 2y + z = v \\ 4x + \quad \quad 3z = w \end{cases}$ ,

écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & L_2 - L_1 \rightarrow L_1 \\ 3 & 2 & 1 & \\ 4 & 0 & 3 & \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array} \right|$$

On égalise le coefficient  $a_{11}$  à 1

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \\ 3 & 2 & 1 & L_2 - 3L_1 \rightarrow L_2 \\ 4 & 0 & 3 & L_3 - 4L_1 \rightarrow L_3 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array} \right|$$

On fait apparaître des 0 dans le reste de la première

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \\ 0 & -1 & 1 & -L_2 \rightarrow L_2 \\ 0 & -4 & 3 & \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & \\ 3 & -2 & 0 & \\ 4 & -4 & 1 & \end{array} \right|$$

On égalise le coefficient  $a_{22}$  à 1

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & L_1 - L_2 \rightarrow L_1 \\ 0 & 1 & -1 & \\ 0 & -4 & 3 & L_3 + 4L_2 \rightarrow L_3 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & \\ -3 & 2 & 0 & \\ 4 & -4 & 1 & \end{array} \right|$$

On fait apparaître des 0 dans les reste de la 2<sup>e</sup> col

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & -1 & \\ 0 & 0 & -1 & -L_3 \rightarrow L_3 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & \\ -3 & 2 & 0 & \\ -8 & 4 & 1 & \end{array} \right|$$

On égalise le coefficient  $a_{33}$  à 1

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & L_1 - L_3 \rightarrow L_1 \\ 0 & 1 & -1 & L_2 + L_3 \rightarrow L_2 \\ 0 & 0 & 1 & \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & \\ -3 & 2 & 0 & \\ 8 & -4 & -1 & \end{array} \right|$$

On égalise le reste des coefficients de la 3<sup>e</sup> colonne

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{ccc|c} -6 & 3 & 1 & \\ 5 & -2 & -1 & \\ 8 & -4 & -1 & \end{array} \right|$$

$$\text{Donc } A^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & -1 \\ 8 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

### 3 Puissances $n^{\text{ième}}$ d'une matrice

#### Puissance nième

Pour toute matrice  $A$  et tout entier  $n \geq 1$ , on définit  $A^n = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n \text{ facteurs}}$ ,

et si  $A$  est inversible, on définit  $A^{-n} = \underbrace{A^{-1} \times A^{-1} \times \dots \times A^{-1}}_{n \text{ facteurs}}$ .

Par convention  $A^0 = I$ .

#### 3.1 Cas des matrices diagonales

Soit  $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$ . Alors pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $A^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 & 0 \\ 0 & \mu^n & 0 \\ 0 & 0 & \nu^n \end{pmatrix}$ .

## 3.2 Formule du binôme

### Formule du binôme

Si  $A$  et  $B$  sont deux matrices qui commutent,

alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$

**Exemple.** Soit  $M = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $M = A + B$ , avec  $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Montrer que  $B^2 = 0$ , et en déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $M^n = A^n + nA^{n-1}B$ .

## 3.3 Relation de récurrence

**Exemple** (d'après ESC 2016).

On considère les matrices  $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ , et  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que  $AP = PD$ .
2. Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A^n P = PD^n$ .
3. Déterminer  $P^{-1}$  et en déduire l'expression de  $A^n$ .