Logique et ensembles

1 Logique

Exercice 1 (*Connecteurs logiques*)

On considère un lancer de dé à six faces. Mettre le connecteur logique ($\Rightarrow$ ou $\Leftarrow$ ou $\Leftrightarrow$) qui convient :

(a) Le nombre obtenu est pair........ Le nombre obtenu est 4

(b) Le nombre est 6 .... Le nombre est un multiple de 3

(c) Le nombre est un multiple de 2 .... Le nombre est 6

(d) Le nombre est un multiple de 6....... Le nombre est 6

(e) Le nombre est un multiple de 2 ..... Le nombre est un multiple de 4

Exercice 2

Soient les propositions, (P) : " J'ai mon permis de conduire " (Q) : "j'ai plus de 18 ans " (R) : "J'ai mon code" . On suppose que pour pouvoir passer son code il faut avoir plus de 18 ans.

(a) Ecrire toutes les relations d'implications possibles entre (P), (Q) et (R)

(b) Traduire par une phrase en français les propositions suivantes :

— Q et $\overline{R}$

— R et $\overline{P}$

(c) On rappelle que :" Pour avoir son permis il faut avoir son code et avoir plus de 18 ans." Traduire cette phrase en terme de connecteur logique entre P, Q, R.

(d) La proposition " $\overline{Q}$ et P" est-elle vraie ? Argumenter.

(e) La proposition "R et $\overline{P}$" est-elle vraie ? Argumenter.

(f) La proposition "R et $\overline{P}$" est -elle vraie ? Argumenter.

Exercice 3 (*Négation*)

Donner la négation des propositions suivantes :

(a) Tous les basketteurs mesurent plus de 2m

(b) Il existe un basketteur qui mesure 4m

(c) Il existe une planète du système solaire qui est cubique

(d) Toutes les planètes du système solaire sont dépourvues d'eau

2 Ensembles

Exercice 4

Dire si les propositions suivantes sont correctes, et si elles ne le sont pas, les corriger pour qu'elles le deviennent :

1. $1 \in \{1; 2\}$
2. $1 \subset \{1; 2\}$
3. $1 = \{1; 2; 3\} \cap \{-1; 0; 1\}$
4. $\{1; 2; 3\} = \{3; 2; 1\}$
5. Si $A = \{1; 2\}$ et $B = \{3; 4\}$ alors $(4; 1) \in A \times B$

Exercice 5 (*Vers la loi de Morgan*)

Soit l'ensemble Ω de tous les entiers naturel de 1 à 12.

1. $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ et $B = \{5; 6; 7; 8\}$ sont-ils bien des sous-ensembles de Ω ?
2. Que vaut $\overline{A}$ le complémentaire de A dans Ω ? Même question pour B.
3. Que vaut $A \cup B$? $A \cap B$?
4. Que valent $\overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cap B}$? Conclusion ?
5. Que valent $\overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cup B}$? Conclusion ?

Exercice 6 (*Produit cartésien*)

Soient $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 5\}$ et $C = \{2, 10\}$.

1. Expliciter les produits cartésiens : $A \times B \quad B \times A \quad C \times B \quad (A \cap C) \times B$
2. Expliciter l'ensemble $(A \times B) \cap (C \times B)$. Que remarque-t-on ?

Exercice 7 (*Ensembles infinis*)

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres entiers naturels pairs et $\mathcal{I}$ l'ensemble des nombres entiers naturels impairs.

1. Les propositions logiques suivantes sont-elles vraies :
$$\mathcal{I} \subset \mathbb{N}, \quad \mathcal{P} \subset \mathbb{N}, \quad \mathcal{I} \subset \mathbb{Z}, \quad \mathcal{P} \subset \mathbb{Z}$$
2. On considère $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ comme deux sous-ensembles de $\mathbb{N}$.
Que valent dans ce cas $\overline{\mathcal{P}}$ et $\overline{\mathcal{I}}$?
3. Que valent $\mathcal{I} \cap \mathcal{P}$ et $\mathcal{I} \cup \mathcal{P}$?
4. Donner un élément de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ qui n'est pas dans $\mathcal{I} \times \mathcal{P}$.
5. On considère l'ensemble $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Expliciter $A \cap \mathcal{I}$ et $A \cap \mathcal{P}$.

Exercice 8 (*Ensemble des parties de E*)

Si $E = \{10; 20; 30; 40\}$, écrire $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.