

A rendre pour le

### Exercice 1 : Récurrence

Soit  $A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix}$  et  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

1. Vérifier que  $P$  est inversible et donner  $P^{-1}$
2. Vérifier que  $D = P^{-1}AP$  est une matrice diagonale que l'on précisera.  
En utilisant le cours, donner l'expression de  $D^n$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .
3. Démontrer par récurrence que pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A^n = P.D^n.P^{-1}$  (Voir cours Matrice 1)
4. En déduire pour tout entier  $n \geq 1$ , l'expression de  $A^n$  en fonction de  $n$ .

### Exercice 2 : Formule du binôme

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

1. Déterminer la matrice  $J$  telle que  $A = I_3 + J$ .
2. Démontrer que  $J^3 = 0$ , puis que  $J^k = 0$  pour  $k \geq 3$
3. En déduire en utilisant la formule du binôme que

$$A^n = I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2$$

4. En déduire l'expression de la matrice  $A^n$  en fonction de  $n$  pour tout entier  $n \geq 1$