Exercices : Séries

1 Sommes de suites arithmétiques et de suites géométriques

Rappel

— Si $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique, alors pour tout entier n,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{(u_0+u_n)(n+1)}{2} = \frac{(\text{premier terme} + \text{dernier terme})(\text{nombre de termes})}{2}.$$

— Si $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q, alors pour tout entier n,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Exercice 1

Soit n un entier naturel quelconque.

1. Exprimer en fonction de n la somme $\sum_{k=0}^{n} k$.
2. Exprimer en fonction de n la somme $\sum_{k=0}^{n} 3^k$.

Exercice 2

Calculer :

(a) $\sum_{k=0}^{8}(1+2k)$ (b) $\sum_{k=0}^{10}(3-\frac{1}{3}k)$ (c) $\sum_{k=3}^{12}(5k-2)$

Exercice 3

Calculer :

(a) $\sum_{k=0}^{5} 2^k$ (b) $\sum_{k=0}^{7}\frac{3}{2^{k+1}}$ (c) $\sum_{k=0}^{7} 5\times(-3)^{k+2}$

Exercice 4

1. Montrer par récurrence que $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2. Montrer par récurrence que $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

2 Séries convergentes

Exercice 5

Parmi les séries suivantes, lesquelles ont un terme général qui tend vers 0 ?
Pour les autres, que peut-on dire de leur convergence ?

(a) $\sum_k k^2$

(b) $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}$

(c) $\sum_k (-1)^k$

(d) $\sum_k \left(\frac{1}{2}\right)^k$

(e) $\sum_k \frac{k}{1+k}$

(f) $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{2k}$

Exercice 6

Calculer la somme des séries suivantes :

a) $\sum_k \left(-\frac{1}{2}\right)^k$ b) $\sum_k \frac{2^k}{k!}$ c) $\sum_k \frac{(-1)^k}{k!}$ d) $\sum_k 0,1^k$ e) $\sum_k \frac{1}{3^k}$ f) $\sum_k \frac{5^k}{k!}$

Exercice 7

Calculer la somme des séries suivantes :

a) $\sum_k \frac{3}{2^k}$

b) $\sum_k 5 \times (-0,2)^k$

c) $\sum_k \frac{1}{3^{k+1}}$

d) $\sum_k \frac{5}{2^{k-2}}$

e) $\sum_k \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k}$

f) $\sum_k \frac{3 \times 2^k}{k!}$

g) $\sum_k \frac{3^{k-2}}{k!}$

h) $\sum_k \frac{4^{k+2}}{k!}$

Exercice 8

En 1671, le mathématicien écossais James Gregory écrit dans une lettre au géomètre anglais John Collins une formule de laquelle peut être déduite l'égalité :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

1. (a) Écrire les trois termes suivants de la série
   (b) Écrire le $n^{\text{ème}}$ terme de la série.
   (c) Calculer la valeur approchée de π obtenue avec les 10 premiers termes.
   (d) Quelle est la précision de l'approximation ?
2. Reprendre les questions précédentes avec la série :

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{3 \times 3} + \frac{1}{5 \times 3^2} - \frac{1}{7 \times 3^3} + \dots$$

3. Comparer les précisions obtenues.

Exercice 9

En 1668, le mathématicien anglais William Brouncker publie le développement en série de $\ln 2$:

$$\ln 2 = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{5 \times 6} + \dots$$

1. Écrire les trois termes suivants de la série
2. Écrire le $n^{\text{ème}}$ terme de la série.
3. Calculer la valeur approchée de $\ln 2$ obtenue avec les 10 premiers termes.
4. Quelle est la précision de l'approximation ?